Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
et X, Y des variables aléatoires réelles de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

I) Espérance

Dans cette partie, $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ie $\int_\Omega |X| \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(|X|) < \infty$

1) Définition et exemples

Déf 1 : On appelle espérance de X le réel : $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$
on dit que X est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Th de transfert : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne telle que X et $\varphi(X) \in \mathbb{L}^1$
alors $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_\Omega \varphi \circ X(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} \varphi(x) \, d\mathbb{P}_X(x)$

Rq 3 : • $\mathbb{E}(X) = \int_\mathbb{R} x \, d\mathbb{P}_X(x)$

• Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Prop 4 : $X \sim \mathcal{B}(p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = p$; $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \lambda$; $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
$X \sim \mathcal{B}(n,p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = np$; $X \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$; $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = m$

Rq 5 : Si $X \sim \mathcal{C}(1)$, alors X n'admet pas d'espérance

Prop 6 : Soit X une variable aléatoire positive, de fonction de répartition F_X
alors $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) \, dt = \int_0^{+\infty} 1 - F_X(t) \, dt$.

2) Propriétés

Inégalité de Jensen : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $X, \varphi(X) \in \mathbb{L}^1$, alors $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$

Prop 8 : $\mathbb{E}$ définit une forme linéaire continue sur $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
En particulier, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(aX + bY) = a\,\mathbb{E}(X) + b\,\mathbb{E}(Y)$.

Inégalité de Markov : Soit $\alpha > 0$, alors $\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\alpha}$

3) Indépendance

Prop 10 : Si X et Y sont indépendantes, alors $XY \in \mathbb{L}^1$ et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) . \mathbb{E}(Y)$

Rq 11 : La réciproque est fausse

Déf 12 : On dit que X et Y sont non corrélées si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) . \mathbb{E}(Y)$

Prop 13 : Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de variables aléatoires
$(X_i)_{i \in I}$ est indépendante $\Leftrightarrow$ Pour tout J ss famille finie de I,
$\forall (\phi_j)_{j \in J}$ boréliennes tq $\phi_j(X_j) \in \mathbb{L}^1$,
on a $\mathbb{E}\left(\prod_{j \in J} \phi_j(X_j)\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{E}(\phi_j(X_j))$

II Moment d'ordre 2

Dans cette partie, $X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1) Moment d'ordre 2

Déf 14 : On appelle moment d'ordre 2 de X le réel : $m_2 = \mathbb{E}(X^2) = \int_\Omega x^2 \, d\mathbb{P}_X(x)$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Si $X, Y \in \mathbb{L}^2$, alors $XY \in \mathbb{L}^1$ et $\mathbb{E}(XY) \leqslant \mathbb{E}(X^2)^{1/2} \cdot \mathbb{E}(Y^2)^{1/2}$

Rq 16 : En particulier, $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$ ainsi $\mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1$

2) Variance

Déf 17 : . On appelle variance de X le réel : $\mathbb{V}(X) = \inf\limits_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left((X-a)^2\right) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$

. On appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

. On dit que X est réduite si $\sigma(X) = 1$

Rq 18 : Si $\mathbb{V}(X) > 0$, alors $Z = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite ; Si $\mathbb{V}(X) = 0$, X est p.s cste

Formule de Koenig : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Prop 20 : $X \sim \mathcal{B}(p) \Rightarrow \mathbb{V}(X) = p(1-p)$; $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow \mathbb{V}(X) = \lambda$; $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

$X \sim \mathcal{B}(n,p) \Rightarrow \mathbb{V}(X) = np(1-p)$; $X \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow \mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$; $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Rightarrow \mathbb{V}(X) = \sigma^2$

3) Covariance

Prop 21 : $\mathbb{V}$ définit une forme quadratique sur $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

En particulier, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX) = a^2 \mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(X+b) = \mathbb{V}(X)$

Déf 22 : On appelle covariance la forme bilinéaire symétrique associée à $\mathbb{V}$

ie $\forall X, Y \in \mathbb{L}^2$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)).(Y - \mathbb{E}(Y))\right) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Prop 23 : X et Y sont non corrélées ssi $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Prop 24 : $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

4) Comportement asymptotique

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall \alpha > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$

DVPT 1

Appli 26 : Th d'approximation de Weierstrass

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme B_n sur $[0,1]$

par $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

alors la suite de polynômes (B_n) converge uniformément vers f sur $[0;1]$

Loi faible des grands nombres :

Soit (X_n) une suite de variables iid, admettant un moment d'ordre 2

alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(|\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_1)| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

III) Moments d'une variable aléatoire

1) Moments d'ordre p

Inégalité de Hölder : Soient $p, q \in [1 ; +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Si $X \in \mathbb{L}^p$ et $Y \in \mathbb{L}^q$ alors $XY \in \mathbb{L}^1$ et $\mathbb{E}(|XY|) \leq \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p} . \mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}$

Déf 30 : Soit $p \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathbb{L}^p$, on appelle moment d'ordre p de X : $m_p = \mathbb{E}(X^p) = \int_{\mathbb{R}} x^p \, d\mathbb{P}_X(x)$

Exples 31 : $m_0 = 1$; Si $X \in \mathbb{L}^1$, alors $m_1 = \mathbb{E}(X)$; Si $X \in \mathbb{L}^2$, alors $m_2 = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2$.

Prop 32 : $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leq p \leq q$, on a : $\mathbb{L}^\infty \subset \dots \subset \mathbb{L}^q \subset \mathbb{L}^p \subset \dots \subset \mathbb{L}^1$

En particulier, si X admet un moment d'ordre p, alors X admet des moments d'ordre $q \leq p$

Exple 33 : Soit X_p la variable aléatoire à valeurs ds $\mathbb{N}^*$ définie par $\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{\zeta(2+p)} \cdot \frac{1}{n^{2+p}}$

$\forall q \in [\![0, p]\!]$, X_p admet un moment d'ordre q : $m_q = \frac{\zeta(2+p-q)}{\zeta(2+p)}$, mais pas d'ordre $p+1$.

① **Th des moments de Haussdorff :** Soient X, Y bornées tq $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$ alors $X \sim Y$.

2) Fonction caractéristique

Déf 35 : On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction caractérisque de X par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, d\mathbb{P}_X(x)$

D V P T ② **Th 36 :**
- Si X admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi_X \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \, \mathbb{E}(X^k e^{itX})$. En particulier, $\varphi^{(k)}(0) = (-i)^k \mathbb{E}(X^k)$
- Si φ_X est p fois dérivable en 0, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$

Th de Lévy : Soit (X_n) une suite de var. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} \varphi_X(t)$.

D V P T ③ **Th central limite :** Soit (X_n) une suite de variables réelles iid, admettant un moment d'ordre 2,

Si $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1) > 0$ alors $\sqrt{n} . \frac{\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_1)}{\sigma} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} Y$ où $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

3) Fonction génératrice des moments

Déf 39 : On définit la transformée de Laplace de X par $L_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX})$, $\forall s \in \mathbb{R}$ tq $e^{sX} \in \mathbb{L}^1$.

Th 40 : Si $\exists \alpha > 0$ tel que $e^{|\alpha| X} \in \mathbb{L}^1$, alors L_X est définie sur $]-\alpha, \alpha[$ et y est analytique

ie $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$, $L_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X^n) . \frac{x^n}{n!}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$

D V P T ④ **Appli 41 : Inégalité de Hoeffding**

Soit (X_n) une suite de var indépendantes, centrées tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists c_n > 0$ / $|X_n| \leq c_n$ p.s.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $a = a_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 e^{-\frac{\varepsilon^2}{2a}}$.

4) Série génératrice des moments

Ici X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$

Déf 42 : On appelle série génératrice de X la somme de la série entière : $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) t^n$

Th 43 :
- $X \in L^1 \iff G_X$ est dérivable à gauche en 1. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$
- $X \in L^p \iff G_X$ est $(p+1)$ fois dérivable à gche en 1. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X(X-1) \cdots (X-p)) = G_X^{(p+1)}(1^-)$

D V P T ⑤ **Appli 45 : Processus de Galton - Watson :** Soit $(X_i^n)_{i,n \in \mathbb{N}^*}$ famille de var iid à valeurs dans $\mathbb{N}$

On définit $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{n+1}$. On pose $m = \mathbb{E}(X_1^1)$ et on suppose $\mathbb{P}(Z_1 = 1) \neq 1$

alors $\mathbb{P}(Z_n = 0) \to 1$ si $m \leq 1$ ou $\exists c > 0$, $\mathbb{P}(Z_n > 0) \geq c$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sinon